

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

5-дәріс. Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есеп

Дәрістің мақсаты – сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу

Негізгі сұрақтар:

1. сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз қойылымы
2. Интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есепке эквивалентті локалды емес тура есеп
3. Локалды емес тура есептің әлсіз және әлді шешімінің бар болуы
4. Локалды емес тура есептің әлсіз және әлді шешімінің жалғыздығы

1 Есептің қойылымы

Бұл дәріс алдыңғы 3-4 дәрістерде қарастырылған кері есебінің дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесінде конвективті мүшесі болмағанда уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденеді. Жоғарыда қарастырылған кері есептің сызықты жағдайда глобалды шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы [1, 2] жұмыстарда зерттелінді. Алайда, қарастырылып отырған кері есептердің уақыт бойынша глобалды әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы есептің берілгендеріне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін кері есепті қарастырайық

$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (1.4)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \omega d\mathbf{x} = e(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

Айталық, есептердің берілгендері келесі шарттарды қанағаттандырсын дейік.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}; \quad (1.6)$$

$$\omega(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}, \quad e(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (1.7)$$

$$(\mathbf{u}_0, \omega)_{2, \Omega} = e(0); \quad (1.8)$$

$$K(t) \in L^2([0, T]) : \quad \|K(t)\|_{L^2([0, T])} \equiv K_0 < \infty. \quad (1.9)$$

Онда (1.1)-(1.5) кері есебіне эквивалентті $\mathbf{u}$ функциясын табуға арналған тура есебі (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(s) ds + \nabla p = \\ F_2(\mathbf{u}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \end{aligned} \quad (1.10)$$

теңдеуді қанағаттандырады, мұндағы $F_2(\mathbf{u}, t)$ функционалы

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{u}, t) := \frac{1}{g_0(t)} \left(e'(t) + \kappa (\nabla \mathbf{u}_t(t), \nabla \omega)_{2, \Omega} + \right. \\ \left. \nu (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \omega)_{2, \Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \omega)_{2, \Omega} ds \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

өрнекпен анықталады.

Лемма 1.1. Айталық, (1.6)-(1.8) шарттар орындалсын. Онда (1.1)-(1.5) кері есебі (1.10), (1.3), (1.4) тура есебіне эквивалентті.

Дәлелдеуі 1.1. Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секілді дәлелденеді.

Енді (1.10), (1.3), (1.4) тура есебінің әлсіз шешімінің бар болуы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.1. Айталық, (1.6)-(1.9) ұйғарымдары және қандай да бір m оң саны табылып келесі шарт орындалсын

$$\frac{\kappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2. \quad (1.12)$$

орындалсын. Онда Q_T цилиндрінде (1.10), (1.3), (1.4) тура есебінің $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ әлсіз шешімі бар болады, сонымен бірге 1.1-лемма бойынша оған эквивалентті (1.1)-(1.5) кері есебінің әлсіз шешімі табылады және ол барлық $t \in (0, T]$ үшін келесі бағалауды қанағаттандырады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{V})}^2 + \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}^2(0, T_1; \mathbf{L}^2(\Omega) \cap \mathbf{V})}^2 \leq C, \quad (1.13)$$

мұндағы C есептің берілгендерінен тәуелді тұрақты.

Доказательство. Соңғы тұжырым аналогты түрде 3-дәрістегі (1.1)-(1.5) кері есебінің шешімділігі секілді (1.1)-(1.5) кері есебі үшін де дәлелденеді. Нақтырақ айтқанда, (1.10), (1.3), (1.4) тура есебінің әлсіз шешімі барлық $t \in (0, T]$ үшін (1.13) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Ал дәлелдеу алгоритмі 3-дәрістегі 1.1-теореманың дәлелдеуі секілді жүргізіледі.

Демек, конвективті мүше болмаған жағдайда 3-дәрістегі (1.25) және (1.26) өрнектерін ескеріп және оларды біріктірсек, онда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \right) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \\ & \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = - \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega} ds - \\ & \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{u}^n(s), \nabla \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} ds + F_2(\mathbf{u}, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}_t^n(t))_{2,\Omega} + \\ & F_2(\mathbf{u}^n, t) (\mathbf{g}(t), \mathbf{u}^n(t))_{2,\Omega}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

теңдігі алынады, мұндағы $F_2(\mathbf{u}^n, t)$ функционалы (1.11) өрнекпен анықталған және

$$\begin{aligned} |F_2(\mathbf{u}^n, t)| & \leq \frac{1}{k_0} [|e'(t)| + \varkappa \|\mathbf{u}_t^n\|_{\mathbf{V}} \|\omega\|_{\mathbf{V}} + \\ & \nu \|\mathbf{u}^n\|_{\mathbf{V}} \|\omega\|_{\mathbf{V}} + \|\omega\|_{\mathbf{V}} K_0 \left(\int_0^t \|\mathbf{u}^n(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}] . \end{aligned} \quad (1.15)$$

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.14) теңдіктің оң жағын бағалау үшін бірінші және екінші қосылғыштарға, сәйкесінше, 3-дәрістегі (1.28) және (1.29) бағалауларды қолданып, ал үшінші және төртінші қосылғыштарын, сәйкесінше, 3-дәрістегі (1.30) және (1.31) бағалауларын негізге ала отырып (1.15) өрнекті бірге ескеріп бағалағанда

$$z(t) := 1 + \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2$$

функциясы үшін келесі дифференциалдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} & z'(t) + \nu \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ & C_1 \int_0^t z(s) ds + C_2 z(t) + C_3(t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \alpha & := 2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \right); \quad \beta := 2 \left(\varkappa - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varkappa^3}{\varepsilon_2 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \\ C_1 & := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\frac{K_0^2}{\nu} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_1} + \frac{2K_0^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,\Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \right); \end{aligned}$$

$$C_2 := \frac{1}{\nu + \varkappa} \left(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + \frac{2\nu^2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \right);$$

$$C_3(t) := \frac{2}{\varepsilon_3 k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 |e'(t)|^2.$$

Енді $\varepsilon_2 = \frac{2e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon_3 = \frac{\sin \varepsilon}{e^\varepsilon}$; $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таңдасақ және ε_1 -дің сәйкес мәні үшін $\frac{\varkappa}{k_0^2} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2, \Omega}^2 \|\omega\|_{\mathbf{V}}^2 \leq m < 2$ теңсіздігінің жоғарғы шекарасын m -нен 2-ге дейін кеңейтуге болады. Алайда, ε_1 саны $m > 2$ болатындай таңдалмауы керек, себебі $\alpha > 0$ болғандығынан $\varepsilon_2 < 2$.

Енді (1.16) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап, 3-дәрістегі (1.24) өрнекті қолдансақ, келесі интегралдық теңсіздік шығады

$$\begin{aligned} z(t) + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})}^2 + \alpha \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})}^2 \leq \\ C_5 \int_0^t z(s) ds + C_6, \end{aligned} \quad (1.17)$$

мұндағы

$$C_4 = C_1 T + C_2; \quad C_5 = 1 + \|\mathbf{u}_0\|_{2, \Omega}^2 + (\varkappa + \nu) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t C_3(s) ds.$$

Сөйтіп, (1.17) өрнектің сол жағындағы екінші, үшінші және төртінші қосылғыштарды ескермей сызықты Гронуолл теңсіздігін қолданғанда

$$z(t) \leq C_5 e^{C_4 T} \quad (1.18)$$

бағалауы тұжырымдалады.

Егер (1.18) бағалауды (1.17) өрнектің оң жағына ескеріп, сондай-ақ, екі жағынан $t \in [0, T]$ бойынша супремум алсақ, онда келесі әлсіз шешім үшін априорлық бағалау қорытылады

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{2, \Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}^n(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \nu \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})}^2 + \\ \alpha \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(Q_T)}^2 + \beta \|\mathbf{u}_t^n\|_{L^2(0, T; \mathbf{V})}^2 \leq M := M(T, C_4, C_5). \end{aligned} \quad (1.19)$$

□

Теорема 1.2. Айталық, 1.1-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, 3-дәрістегі (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.10), (1.3), (1.4) тура есебінің әлді шешімі бар болады сонымен бірге 1.1-лемма бойынша оған эквивалентті (1.1)-(1.5) кері есебінің әлді шешімі табылады және ол барлық $t \in (0, T]$ үшін 3-дәрістегі (1.73) бағалауды қанағаттандырады.

Дәлелдеуі 1.2. Бұл теорема дәлелдеу үшін (1.10), (1.3), (1.4) тура есебінің әлді шешімі барлық $t \in (0, T]$ үшін 3-дәрістегі (1.50) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткілікті. Дәлелдеу алгоритмі 3-дәрістегі 1.2-теореманың дәлелдеуіне ұқсас түрде жүргізіледі.

Демек, 3-дәрістегі (1.52) өрнегіне аналогты энергетикалық теңдік келесі түрде болады

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 = \\ & - \int_0^t K(t-s) \left(\tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s), \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega} ds + F_2(\mathbf{u}^n, t) \left(\mathbf{g}, -\tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right)_{2,\Omega}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

Енді (1.20) оң жағын бағалау үшін Гельдер және Юнг теңсіздіктерін (1.15) өрнекпен бірге қолданғанда

$$\begin{aligned} & \nu \frac{d}{dt} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \mathbf{u}_t^n(t) \right\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \\ & \frac{2}{\varkappa} \left[K_0^2 \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds + |F_2|^2 \left\| \mathbf{g}(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Сөйтіп, (1.21) өрнекті s бойынша 0-ден t -ға шейін интегралдап және әлсіз шешім үшін алынған априорлық бағалауларды ескерсек, онда төмендегі интегралдық теңсіздік алынады

$$\nu \left\| \mathbb{A} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \varkappa \int_0^t \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds \leq C_7 + C_8 \int_0^t \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(s) \right\|_{2,\Omega}^2 ds, \quad (1.22)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} C_7 &:= \nu \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_0 \right\|_{2,\Omega}^2 + \frac{3}{\varkappa} \left\| \mathbf{g} \right\|_{L^\infty(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega))}^2 \int_0^T |F_2(s)|^2 ds < \infty, \\ C_8 &:= \frac{2}{\nu \varkappa} K_0^2 T < \infty. \end{aligned}$$

Демек, (1.22) өрнекке Гронуолл теңсіздігін ескерсек, онда келесі бағалау алынады

$$\left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu} C_7 e^{C_8 T}, \quad \forall t \in (0, T) \quad (1.23)$$

Егер (1.22) өрнектің екі жағынан $t \in [0, T]$ бойынша супремум алып және (1.23) бағалауды қолдансақ, онда төмендегі бағалау тұжырымдалады

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}^n(t) \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \tilde{\Delta} \mathbf{u}_t^n \right\|_{\mathbf{L}^2(Q_T)}^2 \leq C := C(\nu, \varkappa, C_7, C_8, T) < \infty. \quad (1.24)$$

(1.1)-(1.5) кері есебінің жалғыздығы туралы келесі теорема орынды.

Теорема 1.3. Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.1)-(1.4), (1.11) есебінің әлсіз шешімі жалғыз болады.

Дәлелдеуі 1.3. Бұл тұжырымның дәлелдеуі 3-дәрістегі 1.3-теореманың дәлелдеуіне аналогты түрде тұжырымдалады, сондықтан дәлелдеусіз қалдырдық.

Список литературы

- [1] Khompysh K., Shakir A. G. Time dependent inverse source problems for integrodifferential Kelvin–Voigt system // In: Ruzhansky M., Van Bockstal K. (eds) Extended Abstracts 2021/2022. APDEGS 2021. Trends in Mathematics, vol. 2. – Cham: Birkhäuser, 2024. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-42539-4_21 1
- [2] Khompysh K., Shakir A. G. Inverse problems for Kelvin–Voigt system with memory: global existence and uniqueness // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44. – P. 4348–4359. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223100232> 1